ESCUELA MILITAR DE INGENIERIA
ECUACIONES DIFERENCIALES
Misceláneas de problemas
2013

Tema: SIST. DE E.D. LINEALES DE PRIMER ORDEN.

En los siguientes problemas escriba el sistema lineal en forma matricial.

1. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 5y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 8y \end{cases}$

2. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 7y \\ \frac{dy}{dt} = 5x \end{cases}$

3. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + 4y - 9z \\ \frac{dy}{dt} = 6x - y \\ \frac{dz}{dt} = 10x + 4y + 3z \end{cases}$

4. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2z \\ \frac{dz}{dt} = -x + z \end{cases}$

5. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + z + t - 1 \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y - z - 3t^2 \\ \frac{dz}{dt} = x + y + z + t^2 - t + 2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + 4y + e^{-t} \operatorname{sen} 2t \\ \frac{dy}{dt} = 5x + 9z + 4e^{-t} \cos 2t \\ \frac{dz}{dt} = y + 6z - e^{-t} \end{cases}$

En los problemas siguientes, escriba el sistema dado sin el uso de matrices.

1. $X' = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^t$

2. $X' = \begin{bmatrix} 7 & 5 & -9 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t} - \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-2t}$

3. $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ -2 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-t} - \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t$

4. $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} \operatorname{sen} t + \begin{bmatrix} t-4 \\ 2t+1 \end{bmatrix} e^{4t}$

En los siguientes problemas, compruebe que el vector X es una solución del sistema dado.

1. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 4y \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 7y \end{cases} \quad ;X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-5t}$

2. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + 5y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 4y \end{cases} \quad ;X = \begin{bmatrix} 5\cos t \\ 3\cos t - \operatorname{sen} t \end{bmatrix} e^{t}$

3. $X' = \begin{bmatrix} -1 & 1/4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} X; \quad X = \begin{bmatrix} 5\cos t \\ 3\cos t - \operatorname{sen} t \end{bmatrix} e^{t}$

4. $X' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} X; \quad X = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{t} + \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} te^{t}$

5. $X' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} X; \quad X \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -13 \end{bmatrix}$

6. $X' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} X; \quad X = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} t \\ -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t - \frac{1}{2}\cos t \\ -\operatorname{sen} t + \cos t \end{bmatrix}$

En los siguientes problemas, los vectores dados son soluciones de un sistema $X' = AX$. Determine si los vectores forman un conjunto fundamental en $]-\infty, \infty[$

1. $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-6t}$

2. $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{t}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} e^{t} + \begin{bmatrix} 8 \\ -8 \end{bmatrix} te^{t}$

3. $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad X_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 12 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$

4. $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -13 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-4t}, \quad X_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} e^{3t}$

En los problemas que siguen, compruebe que el vector X_P es una solución particular del sistema dado.

1. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y + 2t - 7 \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2y - 4t - 18 \end{cases} \qquad X_P = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. $X' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad X_P = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

3. $X' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X - \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} e^t; \quad X_P = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} te^t$

4. $X' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 0 \\ -6 & 1 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \operatorname{sen} 3t; \quad X_P = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} 3t \\ 0 \\ \cos 3t \end{bmatrix}$

5. Demuestre que la solución general de

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} X$$

en el intervalo $]-\infty, \infty[$ es:

$$X = c_1 \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}$$

6. Demuestre que la solución general de

$$X' = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t^2 + \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -1 & 5 \end{bmatrix}$$

en el intervalo $]-\infty, \infty[$ es

$$X = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 - \sqrt{2} \end{bmatrix} e^{\sqrt{2}t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 + \sqrt{2} \end{bmatrix} e^{-\sqrt{2}t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} t^2 + \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En los problemas que siguen, determine la solución general del sistema dado.

1. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 3y \end{cases}$

2. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$

3. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{5}{2}x + 2y \end{cases}$

4. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{5}{2}x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{3}{4}x - 2y \end{cases}$

5. $X' = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 8 & -12 \end{bmatrix} X$

6. $X' = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} X$

7. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y - z \\ \frac{dy}{dt} = 2 \\ \frac{dz}{dt} = y - z \end{cases}$

8. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 7y \\ \frac{dy}{dt} = 5x + 10y + 4z \\ \frac{dz}{dt} = 5y + 2z \end{cases}$

9. $X' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} X$

10. $X' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} X$

11. $X' = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} X$

12. $X' = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} X$

En los siguientes problemas, resuelva el problema con valores iniciales.

1. $X' = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} X, \quad X(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

2. $X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} X, \quad X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

En los problemas que sigue, encuentre la solución general del sistema.

1. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y \\ \frac{dy}{dt} = 9x - 3y \end{cases}$

2. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -6x + 5y \\ \frac{dy}{dt} = -5x + 4y \end{cases}$

3. $X' = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} X$

4. $X' = \begin{bmatrix} 12 & -9 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} X$

5. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y - z \\ \frac{dy}{dt} = x + y - z \\ \frac{dz}{dt} = x - y + z \end{cases}$

6. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 2y + 4z \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 2z \\ \frac{dz}{dt} = 4x + 2y + 3z \end{cases}$

7. $X' = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} X$

8. $X' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} X$

9. $X' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} X$

10. $X' = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} X$

11. $X' = \begin{bmatrix} X' = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} X, \quad X(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$

12. $X' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} X, \quad X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

En los problemas que sigue, determine la solución general del sistema dado.

1. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x - y \\ \frac{dy}{dt} = 5x + 2y \end{cases}$

2. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = -2x - y \end{cases}$

3. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 3y \end{cases}$

4. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 5y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 6y \end{cases}$

5. $X' = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} X$

6. $X' = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} X$

7. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = z \\ \frac{dy}{dt} = -z \\ \frac{dz}{dt} = y \end{cases}$

8. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y + 2z \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 6z \\ \frac{dz}{dt} = -4x - 3z \end{cases}$

9. $X' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} X$

10. $X' = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} X$

11. $X' = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -5 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} X$

12. $X' = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} X$

13. $X' = \begin{bmatrix} 1 & -12 & -14 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} X, \quad X(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix}$

14. $X' = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} X, \quad X(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \end{bmatrix}$